楕円母集団の下での一般モーメントパラメータの推定について (統計的分布の近似)

丸山, 芳人; 瀬尾, 隆

数理解析研究所講究録 1334 巻 2003 年 47-63

楕円母集団の下での一般モーメントパラメータの推定について

東京理科大・理　丸山 芳人 (Yoshihito Maruyama)
東京理科大・理　瀬尾　隆 (Takashi Seo)

Department of Mathematical Information Sciences, Faculty of Science, Tokyo University of Science.

1　はじめに

非正規母集団の一つとして有名な楕円母集団における一般モーメントパラメータの推定問題を考える．一般モーメントパラメータには，楕円母集団において，多変量統計解析を行う上で重要となる尖度パラメータを含み，それに関してさまざまな議論がされてきた．特に，推定問題については，正規母集団の下では Mardia[M70]，非正規性の下では Anderson[A93]，Seo and Toyama[ST96] などの結果がある．もう少し詳しく述べると，母集団が正規分布のときに，Mardia[M70] は尖度に関する測度を定義した．また，その測度を基に Anderson[A93] は楕円母集団における尖度パラメータの推定について論じた．そしてそのようなときに，Seo and Toyama[ST96] は尖度パラメータの推定量の漸近分布について考察した．

本論においては，初めに，楕円分布について簡単に説明する．また，Berkane and Bentler[BB87] とは異なる計算法で，楕円分布に従う確率ベクトルの一般モーメントを導出し，合わせてモーメントパラメータを定義する．次に，Anderson[A93] による尖度パラメータの推定に関する結果を一般化し，一般モーメントパラメータの一致推定量を提案する．そして，母集団共分散行列が既知の場合と未知の場合に分けて，推定量の漸近分布を考察する．具体的には，Mardia[M70]，Seo and Toyama[ST96] が議論した尖度パラメータの

一致推定量の漸近的性質を基にして，一般モーメントパラメータへの拡張を与える．ここでは更に，最小二乗誤差 (MSE) も考慮して，推定量の bias 修正を考える．また，いくつかの楕円母集団に対しシミュレーション実験を行い，推定量を数値的に検討する．

2 楕円分布とモーメント

次のような確率密度関数 f と特性関数 ϕ をもつ p 変量確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の一般モーメントを考える．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}) = c_p|\Lambda|^{-\frac{1}{2}}g\Big({}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Lambda^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Big), \\ \phi(\boldsymbol{\theta}) = \exp[i{}^t\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}]\psi({}^t\boldsymbol{\theta}\Lambda\boldsymbol{\theta}), \end{cases}$$

ここで，c_p は正定数，g はある非負関数，Λ は正値定符号行列，ψ はある関数で，${}^t\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{X}$ の転置を表す．このとき，$\boldsymbol{X}$ はパラメータ $\boldsymbol{\mu}$，Λ の p 変量楕円分布 $E_p(\boldsymbol{\mu},\Lambda)$ に従うという．$\boldsymbol{X}$ の平均と共分散行列はそれぞれ，$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\mu}$，$Cov(\boldsymbol{X})=\Sigma=-2\psi'(0)\Lambda$ となる．楕円分布族にはいくつかの特殊な分布があり，例えば，正規分布，Contaminated normal 分布，t 分布なども含まれる ([K70]，[M82] 参照)．

いま，確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ に，条件 ${}^tAA=\Lambda$ を満たす正則行列 A を用いた変数変換 $A^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$ を施したとき，単位球面上の一様分布に従う確率ベクトル $\boldsymbol{U}({}^t\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}=1)$ と非負のスカラー量 R を用いて，$A^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})=R\boldsymbol{U}$ と書ける ([A84] 参照)．また，R と $\boldsymbol{U}$ は独立である．つまり，$\boldsymbol{X}$ のモーメントは，R と $\boldsymbol{U}$ のモーメントから得られる．正規分布の場合，R^2 は自由度 p のカイ二乗分布に従うので，$E(R^{2m})=2^m(\frac{p}{2})_m\equiv 2^m(\frac{p}{2})(\frac{p}{2}+1)\cdots(\frac{p}{2}+m-1)$ が分かる．

補題 1 $\boldsymbol{U}$ の奇数次モーメントは 0，$2m$ 次モーメントは，

$$E(U_iU_j\cdots U_uU_v)=\frac{1}{2^m(\frac{p}{2})_m}\sum_{(d_m)}\delta_{ij}\delta_{kl}\cdots\delta_{uv}$$

である．ただし，δ_{ij} は単位行列 I_p の成分であり，d_m は添え字 $ijkl \cdots uv$ の組み分けの総数を表し，

$$d_m = 2^m \left(\frac{1}{2}\right)_m$$

である．

例えば，$\boldsymbol{U}$ の 2 次，4 次，6 次モーメントはそれぞれ，

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{U}^t\boldsymbol{U}) &= \frac{1}{p} I_p, \\
E(U_i U_j U_k U_l) &= \frac{1}{p(p+2)} \sum_{(3)} \delta_{ij}\delta_{kl}, \\
E(U_i U_j U_k U_l U_s U_t) &= \frac{1}{p(p+2)(p+4)} \sum_{(15)} \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{st}
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
\sum_{(3)} \delta_{ij}\delta_{kl} &= \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \\
\sum_{(15)} \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{st} &= \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{st} + \delta_{ij}\delta_{ks}\delta_{lt} + \delta_{ij}\delta_{kt}\delta_{ls} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{st} + \delta_{ik}\delta_{js}\delta_{lt} \\
&\quad + \delta_{ik}\delta_{jt}\delta_{ls} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{st} + \delta_{il}\delta_{js}\delta_{kt} + \delta_{il}\delta_{jt}\delta_{ks} + \delta_{is}\delta_{jk}\delta_{lt} \\
&\quad + \delta_{is}\delta_{jl}\delta_{kt} + \delta_{is}\delta_{jt}\delta_{kl} + \delta_{it}\delta_{jk}\delta_{ls} + \delta_{it}\delta_{jl}\delta_{ks} + \delta_{it}\delta_{js}\delta_{kl}.
\end{aligned}$$

補題 2 ([HP85]). 楕円分布における R の $2m$ 次モーメントは，

$$E(R^{2m}) = (-4)^m \left(\frac{p}{2}\right)_m \psi^{(m)}(0)$$

である．

補題 1，2 から，次の結果を得る．

定理 1 (楕円分布における $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}$ のモーメント). 奇数次は 0, $2m$ 次は,

$$E\Big[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\cdots(X_v-\mu)\Big]=(\mathcal{K}_{(m)}+1)\sum_{(d_m)}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\cdots\sigma_{uv}$$

である. ただし, σ_{ij} は共分散行列 Σ の成分である. また,

$$\mathcal{K}_{(m)}\equiv\frac{\psi^{(m)}(0)}{\{\psi'(0)\}^m}-1\,,\quad d_m=2^m\left(\frac{1}{2}\right)_m$$

である.

$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}$ のモーメントは, Berkane and Bentler[BB87] も, 特性関数 $\phi(\boldsymbol{\theta})$ の逐次微分によって示しているが, 上の定理 1 と一致することを確認できる. ここで, $\mathcal{K}_{(m)}$ を次数 $2m$ のモーメントパラメータと定義する. 特に, $m=2$ のとき, 次数 4 のモーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(2)}$ は尖度パラメータと呼び, κ と略記する. 楕円分布は尖度パラメータ κ によって特徴付けられている. また, モーメントとキュムラントの関係が次のように表せる ([SO94] 参照).

$$\begin{aligned}
\kappa_{ijkl}&=\kappa\sum_{(3)}\sigma_{ij}\sigma_{kl},\\
\kappa_{ijklst}&=(\mathcal{K}_{(3)}-3\kappa)\sum_{(15)}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{st},\\
\kappa_{ijklstuv}&=(\mathcal{K}_{(4)}-4\mathcal{K}_{(3)}-3\kappa^2+6\kappa)\sum_{(105)}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{st}\sigma_{uv}.
\end{aligned}$$

3 漸近的性質

本節では, モーメント法を用いて, 楕円分布における一般モーメントパラメータの推定を議論する. また, それによって得られる一致推定量の漸近的性質, 具体的には, 母集団共分散行列が既知の場合と未知の場合に分けて, 推定量の平均と分散を漸近展開の形で考察する.

定義 1 ([M70]). $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ を正規母集団からのランダム標本とする.

- Multivariate coefficient of kurtosis.

$$\beta_{2,p} \equiv E\left[\{{}^t(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\}^2\right],$$

- Sample measure of kurtosis.

$$b_{2,p} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{{}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})S^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})\right\}^2.$$

ただし，$\overline{\boldsymbol{X}}$，$S$ はそれぞれ標本平均，標本共分散行列である．

$\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ を $E_p(\boldsymbol{\mu},\Lambda)$ からのランダム標本とするとき，定理 1 を用いれば，$\beta_{2,p}=p(p+2)(\kappa+1)$ と計算できるので，尖度パラメータ κ の一致推定量として

$$\hat{\kappa}=\frac{1}{p(p+2)}b_{2,p}-1$$

が得られる ([A93])．これを一般化すれば，

$$\beta_{m,p} \equiv E\left[\{{}^t(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\}^m\right] = 2^m\left(\frac{p}{2}\right)_m(\mathcal{K}_{(m)}+1)$$

となるので，$2m$ 次モーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(m)}$ の一致推定量を以下のように作ることができる．

$$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}=\frac{1}{2^m(\frac{p}{2})_m}b_{m,p}-1, \tag{1}$$

ただし，

$$b_{m,p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{{}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})S^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})\right\}^m$$

とする．また，S の定義について，Mardia[M70] は Σ の最尤推定量 (MLE) である $S\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}){}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})$ を用いているが，本論では，冒頭で述べたように Anderson[A93]，Seo and Toyama[ST96] の結果を踏まえて，S を Σ の不偏推定量，即ち $S\equiv\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}){}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})$ として議論

初めに Σ が既知の場合，一般性を失うことなく $\Sigma = I_p$ とし，S を Σ で置き換えることにより $T_i^2 = {}^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})$ とすれば，

$$b_{m,p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^{2m}$$

と表現できる．$\boldsymbol{X}_i$ と $\overline{\boldsymbol{X}}$ の従属を避けるために，

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} \boldsymbol{X}_k$$

を定義すると，

$$T_i^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 {}^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})$$

となり，$\boldsymbol{X}_i$ と $\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)}$ は独立である．$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ の期待値を計算するために，

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\boldsymbol{V}$$

とおくと，T_i^{2m} の展開が次のように表せる．

$$\begin{aligned} T_i^{2m} = &({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^m + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-2m({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-1}\,{}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}_i\right\} \\ &+\frac{1}{n}\Big\{m({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-1}({}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} - 2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i) \\ &+2m(m-1)({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-2}({}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}_i)^2\Big\} \\ &+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}_i$ と $\boldsymbol{V}$ に関して期待値を計算することにより，$T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)})$ の漸近平均が

$$E(T) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-m(2\mathcal{K}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m-1)} + 1)\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

となる．正規母集団では，$\mathcal{K}_{(m)} = 0$ であるから，

$$E(T) = -\frac{m}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる．同様に，T_i^{4m} の展開式について期待値を計算することにより，以下の結果を得た．

定理 2 (T の漸近分散)．Σ が既知のとき，$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ を (1) で定義される一致推定量とする．このとき，

$$T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_T^2) \qquad (n \to \infty)$$

ただし，$\xrightarrow{d}$ は法則収束を表し，

$$\sigma_T^2 = \frac{(\frac{p}{2} + m)_m}{(\frac{p}{2})_m}(\mathcal{K}_{(2m)} + 1) - (\mathcal{K}_{(m)} + 1)^2 \tag{3}$$

である．

次に，Σ が未知の場合を考える．一般に，非正規性の下では $\overline{\boldsymbol{X}}$ と S は独立でない．そこで，$\boldsymbol{X}_i$，$\overline{\boldsymbol{X}}$，$S$ の従属を避けるために，

$$T_i^2 = {}^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})S^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}),$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{k \neq i}^{n} \boldsymbol{X}_k,$$

$$S_{(i)} = \frac{1}{n-2}\sum_{k \neq i}^{n}(\boldsymbol{X}_k - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})^t(\boldsymbol{X}_k - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})$$

を定義すると，S について，

$$S = \frac{n-2}{n-1}S_{(i)} + \frac{1}{n}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)}),$$

また，

$$S^{-1} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{-1} S_{(i)}^{-1} - \frac{\frac{(n-1)^2}{n(n-2)^2} S_{(i)}^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})S_{(i)}^{-1}}{1 + \frac{n-1}{n(n-2)}{}^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})S_{(i)}^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})}$$

となる．これより，T_i^2 が以下のように書ける．

$$T_i^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{\tilde{T}_i^2}{1 + \frac{1}{n}\tilde{T}_i^2},$$

ここで，

$$\tilde{T}_i^2 = \frac{n-1}{n-2}{}^t(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)})S_{(i)}^{-1}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_{(i)}).$$

期待値を計算するために，

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\boldsymbol{V},$$

$$S_{(i)} = I_p + \frac{1}{\sqrt{n-1}}M$$

とおくと，$\tilde{T}_i^2$ の展開が次のように表せる．

$$\begin{aligned}\tilde{T}_i^2 &= {}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i + \frac{1}{\sqrt{n}}(-2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{V} - {}^t\boldsymbol{X}_iM\boldsymbol{X}_i) \\ &+\frac{1}{n}({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i + 2{}^t\boldsymbol{X}_iM\boldsymbol{V} + {}^t\boldsymbol{X}_iM^2\boldsymbol{X}_i + {}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}) \\ &+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

これより，T_i^{2m} の展開が次のように表せる．

$$\begin{aligned}T_i^{2m} &= ({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^m + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-m({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-1}(-2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{V} - {}^t\boldsymbol{X}_iM\boldsymbol{X}_i)\right\} \\ &+\frac{1}{n}\Big[\frac{m}{2}({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-2}\Big\{(m-1)(-2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{V} - {}^t\boldsymbol{X}_iM\boldsymbol{X}_i)^2 \\ &+2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i + 2{}^t\boldsymbol{X}_iM\boldsymbol{V} + {}^t\boldsymbol{X}_iM^2\boldsymbol{X}_i + {}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}) \\ &-4({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^2 - 2({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^3\Big\}\Big] \\ &+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

楕円母集団において，$\boldsymbol{V}$ と M の正確な同時確率密度関数 (joint probability density function 略して j.p.d.f) は現在得られていない．そこで, Wakaki[W94]

による漸近展開された j.p.d.f を利用して期待値を計算する．結果として，$T=\sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)}-\mathcal{K}_{(m)})$ の漸近平均が以下のように与えられる．

$$E(T)=\frac{1}{\sqrt{n}}c+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{4}$$

ここで，

$$\begin{aligned}c=m(\mathcal{K}_{(m-1)}+1)-m(p+2m)(\mathcal{K}_{(m+1)}+1)\\ +(3+mp+2m)(\kappa+1)(\mathcal{K}_{(m)}+1)-(2m+1)(\mathcal{K}_{(m)}+1).\end{aligned}$$

同様にして，分散についても計算できる．$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{X}_j$，$\overline{\boldsymbol{X}}$，$S$ の従属を避けるために，

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)}&=\frac{1}{n-2}\sum_{k\neq i,j}^{n}\boldsymbol{X}_k,\\ S_{(i,j)}&=\frac{1}{n-3}\sum_{k\neq i,j}^{n}(\boldsymbol{X}_k-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)})^t(\boldsymbol{X}_k-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)})\end{aligned}$$

を定義すると，$\tilde{T}_i^2$ が以下のように書ける．

$$\tilde{T}_i^2=\frac{1}{n-2}\left\{(n-1)Q_i+Q_iQ_j-Q_{i,j}^2-2Q_{i,j}+\frac{Q_j}{n-1}\right\}\left(1+\frac{Q_j}{n-1}\right)^{-1},$$

ここで，

$$\begin{aligned}Q_i&=\left(1+\frac{1}{n-3}\right){}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)})S_{(i,j)}^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)}),\\ Q_j&=\left(1+\frac{1}{n-3}\right){}^t(\boldsymbol{X}_j-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)})S_{(i,j)}^{-1}(\boldsymbol{X}_j-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)}),\\ Q_{i,j}&=\left(1+\frac{1}{n-3}\right){}^t(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)})S_{(i,j)}^{-1}(\boldsymbol{X}_j-\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)}),\end{aligned}$$

また，

$$E(b_{m,p}^2)=\frac{1}{n}E(T_i^{4m})+\left(1-\frac{1}{n}\right)E(T_i^{2m}T_j^{2m}).$$

更に，期待値を計算するために，

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{(i,j)} = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\tilde{\boldsymbol{V}},$$
$$S_{(i,j)} = I_p + \frac{1}{\sqrt{n-2}}\tilde{M}$$

とおくと，$\tilde{T}_i^{2m}$ の展開が次のように表せる.

$$\begin{aligned}\tilde{T}_i^{2m} &= ({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^m - \frac{1}{\sqrt{n}}m({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-1}(2{}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{\boldsymbol{V}} + {}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{M}\boldsymbol{X}_i)\\ &+\frac{1}{n}\Big[m({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^{m-2}\Big\{\frac{m-1}{2}(2{}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{\boldsymbol{V}} + {}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{M}\boldsymbol{X}_i)^2\\ &+{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i + 2{}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{M}\boldsymbol{V} + {}^t\boldsymbol{X}_i\tilde{M}^2\boldsymbol{X}_i + {}^t\tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{V}})\\ &+({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i)^2 - 2{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i{}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j - {}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i({}^t\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j)^2\Big\}\Big]\\ &+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

T_i^{4m} は $\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{V}$，M に関して期待値を計算し，$T_i^{2m}T_j^{2m}$ は $\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{X}_j$，$\tilde{\boldsymbol{V}}$，$\tilde{M}$ に関して期待値を計算することにより，以下の結果を得た.

定理 3 (T の漸近分散). Σ が未知のとき，$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ を (1) で定義される一致推定量とする．このとき，

$$T = \sqrt{n}(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \mathcal{K}_{(m)}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_T^2) \qquad (n \to \infty)$$

ただし，

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 = &\frac{(\frac{p}{2}+m)_m}{(\frac{p}{2})_m}(\mathcal{K}_{(2m)}+1) + (-m^2+3m+1)(\mathcal{K}_{(m)}+1)^2\\ &+\frac{2^{-m+2}m^2}{p(\frac{p}{2}+2)_{m-2}}(\mathcal{K}_{(m)}+1)(\kappa+1)\Big\{(p+2)(\kappa+1)-p\Big\}\\ &-\frac{2m(p+2m)}{p}(\mathcal{K}_{(m)}+1)(\mathcal{K}_{(m+1)}+1)\\ &+3(m^2-m-2)(\kappa+1)(\mathcal{K}_{(m)}+1)^2 \end{aligned}\tag{5}$$

である.

ここで，$m=2$ とした場合，Seo and Toyama[ST96] が証明した $\hat{\kappa}$ に関する漸近結果と一致する．更に，正規母集団の場合，即ち $\mathcal{K}_{(m)}=0$ のとき，Mardia[M70] が証明した結果と本質的に一致する.

4 数値計算

楕円母集団を次の 3 分布としたとき，次数 6 のモーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(3)}$ の推定量について，数値的評価をする.

(a) $\omega=0.1$，$\tau=3$ の Contaminated normal 分布.

$$\mathcal{K}_{(m)}=\frac{1+\omega(\tau^{2m}-1)}{\{1+\omega(\tau^2-1)\}^m}-1,$$

(b) 多変量正規分布.

(c) 自由度 $\nu=13$ の多変量 t 分布.

$$\mathcal{K}_{(m)}=\frac{(\nu-2)^m}{2^m(\frac{\nu}{2}-m)_m}-1,\quad \nu>2m.$$

$m=3$ とした場合は，次数 12 までのモーメントパラメータが必要になり，そのときの理論値を表 1 で与える．p，n をいろいろ変えて近似式 (2)，(4)

表 1: モーメントパラメータ $\mathcal{K}_{(m)}$ の理論値.

	κ	$\mathcal{K}_{(3)}$	$\mathcal{K}_{(4)}$	$\mathcal{K}_{(6)}$
(a)	1.78	11.65	61.58	1561.52
(b)	0	0	0	0
(c)	0.22	0.92	3.22	169.42

の値を計算すると表 2，3 となる．これに対して，一般性を失うことなく $\Sigma=I_p$ として，10,000 回のモンテカルロシミュレーション実験で統計量 T

表 2: 近似式 (2) で求めた統計量 T の期待値 (Σ が既知のとき).

$n\backslash p$	(a) 2	(a) 3	(a) 4	(b) 2	(b) 3	(b) 4	(c) 2	(c) 3	(c) 4
10	−6.75	−6.75	−6.75	−0.30	−0.30	−0.30	−0.78	−0.78	−0.78
20	−4.77	−4.77	−4.77	−0.21	−0.21	−0.21	−0.55	−0.55	−0.55
50	−3.02	−3.02	−3.02	−0.13	−0.13	−0.13	−0.35	−0.35	−0.35
100	−2.38	−2.38	−2.38	−0.10	−0.10	−0.10	−0.27	−0.27	−0.27
200	−2.13	−2.13	−2.13	−0.09	−0.09	−0.09	−0.22	−0.22	−0.22
500	−1.15	−1.15	−1.15	−0.06	−0.06	−0.06	−0.17	−0.17	−0.17
800	−1.06	−1.06	−1.06	−0.04	−0.04	−0.04	−0.12	−0.12	−0.12

表 3: 近似式 (4) で求めた統計量 T の期待値 (Σ が既知のとき).

$n\backslash p$	(a) 2	(a) 3	(a) 4	(b) 2	(b) 3	(b) 4	(c) 2	(c) 3	(c) 4
10	−92.50	−99.73	−95.96	−1.30	−1.30	−1.30	−7.59	−8.16	−8.72
20	−74.60	−80.42	−86.24	−0.91	−0.91	−0.91	−5.37	−5.77	−6.16
50	−47.18	−50.86	−54.54	−0.58	−0.58	−0.58	−3.39	−3.64	−3.90
100	−37.30	−40.21	−43.12	−0.45	−0.45	−0.45	−2.68	−2.88	−3.08
200	−33.36	−35.96	−38.56	−0.41	−0.41	−0.41	−2.40	−2.58	−2.75
500	−23.59	−25.43	−27.27	−0.29	−0.29	−0.29	−1.69	−1.82	−1.95
800	−16.68	−17.98	−19.28	−0.20	−0.20	−0.20	−1.20	−1.29	−1.37

の平均を調べると，表 4，5 の値が得られる．(a) と (c) は多少のバラツキがあるが，(b) は実によく一致している．また，Σ が既知の場合は，(b) のみならず (a)，(c) についても，標本数小 (せいぜい $n = 50$) で一致する．

表 4: シミュレーション実験で求めた統計量 T の平均 (Σ が既知のとき).

$n\backslash p$	(a) 2	(a) 3	(a) 4	(b) 2	(b) 3	(b) 4	(c) 2	(c) 3	(c) 4
10	−6.04	−6.17	−6.07	−0.36	−0.34	−0.30	−3.72	−3.69	−3.54
20	−5.45	−5.31	−5.04	−0.27	−0.23	−0.14	−2.90	−2.65	−2.72
50	−4.14	−3.41	−3.13	−0.15	−0.11	−0.09	−2.78	−2.23	−2.48
100	−3.84	−2.96	−2.65	−0.12	−0.08	−0.07	−1.14	−1.21	−1.14
200	−2.65	−2.53	−2.38	−0.10	−0.07	−0.07	−1.10	−1.14	−1.12
500	−2.31	−1.48	−1.20	−0.07	−0.06	−0.06	−1.02	−1.05	−0.77
800	−1.70	−1.29	−1.18	−0.03	−0.02	−0.02	−0.33	−0.23	−0.18

表 5: シミュレーション実験で求めた統計量 T の平均 (Σ が未知のとき).

$n\backslash p$	(a)			(b)			(c)		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
10	−58.32	−62.25	−66.10	−0.89	−0.87	−0.85	−5.66	−4.92	−5.05
20	−49.27	−53.04	−57.98	−0.63	−0.64	−0.63	−4.38	−4.01	−4.41
50	−36.46	−39.89	−42.12	−0.40	−0.36	−0.39	−3.31	−3.28	−3.67
100	−31.15	−32.58	−35.71	−0.32	−0.28	−0.30	−2.44	−2.15	−2.62
200	−26.59	−28.75	−30.59	−0.31	−0.27	−0.28	−2.28	−2.29	−2.38
500	−21.13	−20.44	−22.68	−0.21	−0.22	−0.20	−1.22	−1.75	−1.41
800	−12.90	−14.29	−16.33	−0.18	−0.16	−0.14	−1.16	−1.07	−1.26

次に，bias 修正した推定量として，$\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ を与える．Σ が既知のときは，

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(m)} = \hat{\mathcal{K}}_{(m)} + \frac{m}{n}(2\hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \hat{\mathcal{K}}_{(m-1)} + 1). \tag{6}$$

Σ が未知のときは，

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(m)} = \hat{\mathcal{K}}_{(m)} - \frac{\hat{c}}{n}, \tag{7}$$

ここで，

$$\hat{c} = m(\hat{\mathcal{K}}_{(m-1)} + 1) - m(p + 2m)(\hat{\mathcal{K}}_{(m+1)} + 1) \\ +(3 + mp + 2m)(\hat{\kappa} + 1)(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} + 1) - (2m + 1)(\hat{\mathcal{K}}_{(m)} + 1).$$

どちらも期待値を計算すると，n^{-1} の項を消去できる．

$$E(\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}) = \mathcal{K}_{(m)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の bias を比較すると，表 6，7，8 となる．Σ が既知，未知に関わらず，いずれの場合も bias は $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ より (6)，(7) の $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の方が小さくなった．また，$n \to \infty$ のときは，MSE についても $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ の方が小さくな

り，漸近的には $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ は $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ より改良されたといえる.

表 6-1：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p=2$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	−0.381	−0.090	−0.011	−0.008	−0.098	−0.082
$n=50$	−0.174	−0.052	−0.006	−0.005	−0.094	−0.080
$n=100$	−0.182	−0.042	−0.004	−0.004	−0.091	−0.075
$n=500$	−0.070	−0.033	−0.002	−0.003	−0.089	−0.068
$n=1000$	−0.019	−0.009	−0.001	−0.001	−0.072	−0.052
σ_T^2	31090.397		19.000		3404.797	

表 6-2：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p=2$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	−3.484	−0.754	−0.044	−0.013	−0.274	−0.050
$n=50$	−1.631	−0.050	−0.018	−0.006	−0.152	−0.040
$n=100$	−1.101	−0.043	−0.011	−0.004	−0.121	−0.032
$n=500$	−0.472	−0.017	−0.004	−0.002	−0.053	−0.011
$n=1000$	−0.200	−0.011	−0.001	−0.001	−0.040	−0.003
σ_T^2	17981.067		10.500		3276.594	

表 7-1：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p=3$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	−0.154	−0.181	−0.011	−0.003	−0.091	−0.077
$n=50$	−0.190	−0.060	−0.002	−0.002	−0.080	−0.075
$n=100$	−0.101	−0.042	−0.002	−0.001	−0.078	−0.069
$n=500$	−0.006	−0.032	−0.002	−0.001	−0.071	−0.066
$n=1000$	−0.001	−0.023	−0.001	−0.000	−0.051	−0.012
σ_T^2	18891.978		11.257		2085.226	

表 7-2：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p=3$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	-3.751	-0.832	-0.045	-0.012	-0.281	-0.050
$n=50$	-1.784	-0.091	-0.016	-0.008	-0.152	-0.044
$n=100$	-1.152	-0.064	-0.010	-0.005	-0.113	-0.033
$n=500$	-0.457	-0.044	-0.005	-0.001	-0.061	-0.027
$n=1000$	-0.225	-0.023	-0.002	-0.000	-0.050	-0.021
σ_T^2	10558.367		8.114		2003.759	

表 8-1：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が既知のとき).

$p=4$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	-0.350	-0.031	-0.011	-0.001	-0.110	-0.087
$n=50$	-0.091	-0.024	-0.006	-0.001	-0.091	-0.084
$n=100$	-0.112	-0.022	-0.002	-0.000	-0.083	-0.079
$n=500$	-0.041	-0.020	-0.002	-0.000	-0.081	-0.071
$n=1000$	-0.030	-0.014	-0.001	-0.000	-0.073	-0.060
σ_T^2	13511.974		7.750		1487.524	

表 8-2：$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$ の bias (Σ が未知のとき).

$p=4$	(a)		(b)		(c)	
	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\hat{\mathcal{K}}_{(3)}$	$\tilde{\mathcal{K}}_{(3)}$
$n=10$	-4.100	-1.119	-0.045	-0.013	-0.310	-0.072
$n=50$	-1.833	-0.072	-0.017	-0.007	-0.162	-0.041
$n=100$	-1.262	-0.051	-0.010	-0.005	-0.131	-0.037
$n=500$	-0.507	-0.032	-0.004	-0.001	-0.075	-0.035
$n=1000$	-0.258	-0.014	-0.002	-0.001	-0.060	-0.020
σ_T^2	7415.491		7.312		1429.473	

5 おわりに

本論では，一般モーメントパラメータの推定について，bias や MSE を中心に点推定を行ったが，T の漸近正規性を利用すれば，区間推定や検定も考えられる．今後は，定理で得た漸近分散 (3)，(5) を利用して，$\mathcal{K}_{(m)}$ の近似

信頼区間を構成し，その際に $\hat{\mathcal{K}}_{(m)}$ と $\tilde{\mathcal{K}}_{(m)}$ を用いた場合の精度の違いを考察する．また，標本共分散行列 S として Mardia[M70] が用いた Σ の MLE による議論が必要であり，理論的，数値的に検討し，本論の結果と比較していきたい．

参考文献

[A84] Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, (Second ed). John Wiley & Sons, NewYork.

[A93] Anderson, T. W. (1993). Nonnormal multivariate distributions: Inference based on elliptically contoured distributions. *Multivariate Analysis. Future Directions*, (C.R.Rao ed.), Elsevier Science Publishers, pp.1-24.

[BB87] Berkane, M. and Bentler, P. M. (1987). Characterizing parameters of multivariate elliptical distributions. *Comm. Statist. Simulation Comput.* **16**, 193-198.

[HP85] Hayakawa, T. and Puri, M. L. (1985). Asymptotic distributions of likelihood ratio criteria for testing latent roots and latent vectors of a covariance matrix under an elliptical population. *Biometrika* **72**, 331-338.

[K70] Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location scale parameter generalization. *Sankhyá* **A32**, 419-430.

[M70] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika* **57**, 519-530.

[M82] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, NewYork.

[SO94] Stuart, A. and Ord, J. K. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, (Sixth ed. Vol.1), Distribution Theory. Edward Arnold.

[ST96] Seo, T. and Toyama, T. (1996). On the estimation of kurtosis parameter in elliptical distributions. *J. Japan. Statist. Soc.* **26**, 59-68.

[W94] Wakaki, H. (1994). Discriminant analysis under elliptical population. *Hiroshima Math. J.* **24**, 257-298.